Filière : TSI

C.P.G.E.Maroc

CORRECTION DU CNC 2013 CONCOURS COMMUN

cpgespe.mp@gmail.com

Corrigé proposé par M.Ouzi

Four à induction

1.

Tout plan contenant l'axe de la spire Oz est un plan d'anti-symétrie de la distribution du courant donc le champ $\overrightarrow{B}$ appartient à chacun de ces plans donc :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = B(M)\overrightarrow{u}_z}$$

2.

Voir aussi cours.
D'après la loi de $Biot\&Savart$ le module du champ élementaire $d\overrightarrow{B}(M)$ créé en M, par un élement de courant $Id\ell$ en un point P, est donné par :
$dB = \dfrac{\mu_o I}{4\pi||\overrightarrow{PM}||^2}d\ell$ (car $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{d\ell}$) et puisque le champ total est suivant Oz (par symétrie), alors la composante utile est :
$dB_z = dB\sin\theta$ donc :

$$dB_z = \frac{\mu_o I}{4\pi||\overrightarrow{PM}||^2}d\ell\sin\theta$$

Or $\sin\theta = \dfrac{a}{PM}$ soit :

$B_z = \dfrac{\mu_o I}{4\pi}\sin^3\theta \oint_{\mathscr{C}} d\ell$ finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_o I}{2a}\sin^3\theta\,\overrightarrow{u}_z}$$

3.

En O on a $z=0$ et donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $B(0) = \dfrac{\mu_o I}{2a}$ ce qui donne :

$$B(M) = B(O)\sin^3\theta = B(O)\frac{a^3}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

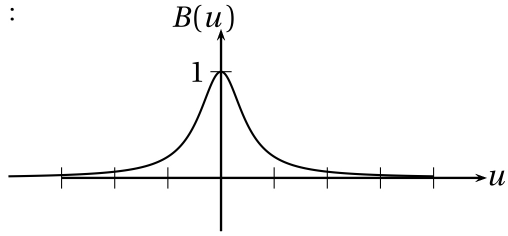
$$B(M) = B(O)\sin^3\theta = B(O)\frac{1}{(1+(\frac{z}{a})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

soit :

$$\boxed{B(M) = \frac{B(O)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

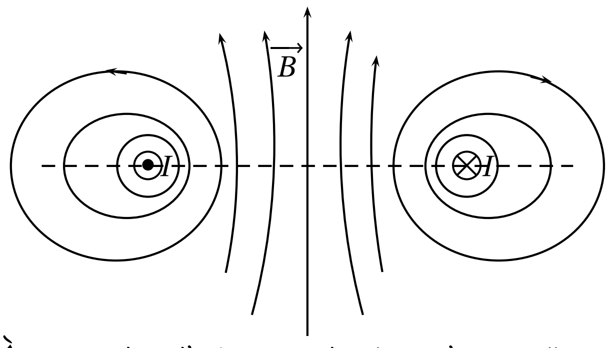
4.

La fonction $B(M) = B(u)$ est paire et maximale au centre et $B(u)$ tend vers zéro quand $|z| \to \infty$, le graphe est le suivant :



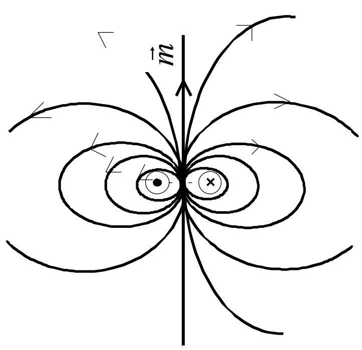
5.

Les lignes de champ se referment sur elles mêmes et le champ n'est pas uniforme et il est normale au plan de la spire car c'est un plan de symétrie.



6.

À grande distance de la spire celle-ci se comporte comme un dipôle magnétique et donc les lignes de champ auront l'allure suivante :



II. Champ magnétique d'une bobine finie

7.

La spire d'épaisseur dz' contribue au champ totale par le vecteur champ

élementiare $d\vec{B}$ tel que :
$\vec{dB} = dN\frac{\mu_o I}{2a}\sin^3\theta\,\vec{u}_z$ (superposition)
où dN est le nobmre de spire contenues dans la tranche dz' Or on a : N spire répartie régulierement sur H et dN sur dz' alors :
$dN = \frac{dz'}{H}N$ finalement :

$$\boxed{dB = \frac{\mu_o INdz'}{2aH}\sin^3\theta}$$

8.

on a : $\cot\theta = \frac{z-z'}{a}$ (θ ici est algébrique)
$-\frac{d\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{dz'}{a}$ donc :
$dB = \frac{\mu_o NI}{2H}\sin\theta\, d\theta$,et donc le champ totale est :
$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o NI}{2H}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta\,\vec{u}_z$ soit :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_o NI}{2H}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\vec{u}_z}$$

9.

Si la bobine est supposée infinie alors $\theta_1 \to 0$ et $\theta_2 \to \pi$ donc :

$$\boxed{\vec{B}_\infty(M) = \mu_o\frac{N}{H}I}$$

10.

Au centre de la bobine on a :

$$(\cos\theta_1)_O = \frac{\frac{H}{2}}{\sqrt{a^2+(\frac{H}{2})^2}}$$

et $(\cos(\pi-\theta_2))_O = \frac{\frac{H}{2}}{\sqrt{a^2+(\frac{H}{2})^2}}$

donc $(\cos\theta_2)_O = -\frac{\frac{H}{2}}{\sqrt{a^2+(\frac{H}{2})^2}}$ et donc le champ au centre de la bobine est :

$$B(O) = \frac{\mu_o NI}{2H}\frac{H}{\sqrt{a^2+(\frac{H}{2})^2}} = \frac{\mu_o NI}{2\sqrt{a^2+(\frac{H}{2})^2}}$$

soit : $B(O) = \frac{\mu_o NI}{2a\sqrt{1+(\frac{H}{2a})^2}}$

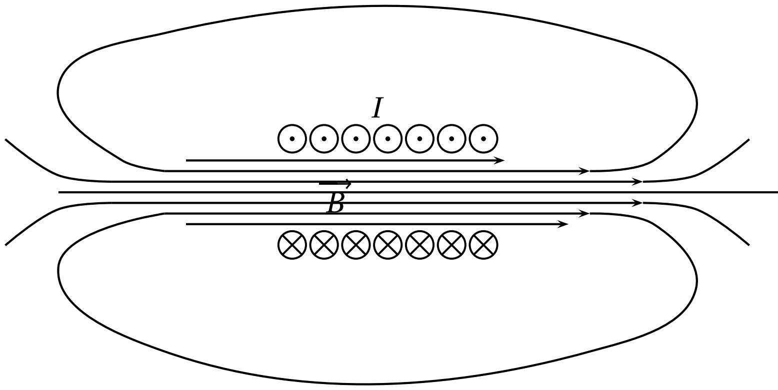
Pour que $B(0)$ soit égale à $B_\infty(0)$ à 10^{-3} près il faut que :
$B(0) = B_\infty(0) + 10^{-3}B_\infty(0)$ donc :
$\mu_o\frac{N}{H}I = (1+10^{-3})\frac{\mu_o NI}{2a\sqrt{1+(\frac{H}{2a})^2}}$ soit :
$2\frac{a}{H}\sqrt{1+(\frac{H}{2a})^2} = (1+10^{-3})$

$\Rightarrow 1+(\frac{H}{2a})^2 = (\frac{H}{2a})^2(1+10^{-3})^2 \simeq (\frac{H}{2a})^2(1+2.10^{-3})$
donc :
$\frac{a}{H} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{2}}$ finalement il faut au moins que :

$$\boxed{\frac{a}{H} = 2,2.10^{-2}}$$

11.

Les lignes de champ de labobine finie sont représentées dans le schéma suivant :



Ces lignes de champ peuvent être visualisées à l'aide de la poudre de fer sapoudrée sur une vitre transparante

III. champ magnétique d'une bobine infinie

12.

tout plan normale à l'axe de la bobine est un plan de symétrie donc $\vec{B}$ est normale à ce plan c-à-d : $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_z$.
Toute rotation et translation le long de l'axe de la bobine laisse la distribution de courant invariante donc $B(M)$ ne dépend ni de z ni de θ en coordonnées cylindriques, donc il ne dépend que de r, c-à-d : $B(M) = B(r)$

13.

Soit $\Gamma = (PQRSP)$ un contour récangulaire tel que $\vec{PQ} = \ell\vec{u}_z$ est le segment sur l'axe Oz et $RS = -\ell\vec{u}_z$ le segment qui lui est parallèle.
posons $\vec{QR} = \vec{PS} = r\vec{u}_r$ avec $r < a$.
Le théorème d'Ampère appliqué à $\vec{B}$ le long de Γ donne :

$$\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{d\ell} = 0$$

car Γ n'enlace aucun courant.

$$\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{d\ell} = B(0)\ell - B(r)\ell = 0$$

car $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_z$ donc :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(r)=\overrightarrow{B}(0)=\mu_o\frac{N}{H}I\overrightarrow{u}_z}$$

et donc $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{B}_{int}$ est uniforme à l'intérieur de la bobine infinie

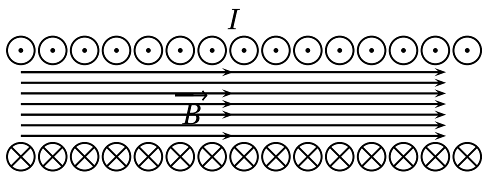
14.

Choisissons dans ce cas le contour $\Gamma=(PQRSP)$ tel que $\overrightarrow{PQ}=\ell\overrightarrow{u}_z$ est sur l'axe et $\overrightarrow{RS}=-\ell\overrightarrow{u}_z$ est en dehors de la bobine, alors le théorème d'ampère le long de ce contour s'écrit par :
$\oint_\Gamma \overrightarrow{B}.\overrightarrow{d\ell}=\mu_o I_{enlac}$ où $I_{enlac}=n'I$ est le courant enlacé par Γ et n' est le nombre de spire contenues dans ℓ, donc :
$B(O)\ell-B_{ext}(r)\ell=\mu_o n'I$ soit :
$\mu_o\frac{N}{H}I=B_{ext}(r)+\mu_o\frac{n'}{\ell}I$ et puisque $\frac{N}{H}=\frac{n'}{\ell}$ (spires régulièrement espacées) alors :

$$\boxed{\overrightarrow{B}_{ext}(r)=\overrightarrow{0}}$$

15.

Pour une bobine supposée infinie les lignes de champ ont l'allure suivante :



16.

Le coefficient d'inductance L est le coefficient de proportionalité entre la flux propre d'un circuit et le courant qui le traverse.

$$\Phi_p=LI$$

Pour la bobine infinie le flux propre $\Phi=N.B.\pi a^2$ et $B=\mu_o\frac{N}{H}I$ donc :

$$\boxed{L=\mu_o\frac{N^2}{H}\pi a^2}$$

Elle ne dépend que de la géométrie de la bobine

17.

Par définition :
$dI_{total}=\overrightarrow{j}_s.d\ell\overrightarrow{u}_\theta$ donc
$I_{total}=\int_0^H j_s\overrightarrow{u}_\theta.dz'\overrightarrow{u}_\theta$
donc $I_{total}=NI=j_sH$ soit :

$$\boxed{\overrightarrow{j}_s=\frac{N}{H}I\overrightarrow{u}_\theta}$$

18.

La force électromotrice induite e dans un circuit, est égale au signe près, à la dérivée par rapport au temps du flux du champ magnétique à travers ce circuit. Les causes peuvent être :
• variation, en fonction du temps, du champ magnétique à travers un circuit fixe (cas de Neuman)
• Mouvement d'un circuit dans un champ magnétique permanent (cas de Lorentz).

19.

Le courant $i(t)$ crée un champ magnétique variable qui donne naissnace dans le conducteur à une force électromotrice telle $e=-\frac{d\Phi}{dt}$ et donc à un champ électromoteur E_i tel que $e=\oint\overrightarrow{E}_i.\overrightarrow{d\ell}$.
ce qu'on peut résumer par la relation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}_i=-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$.
D'après le principe de Curie, les symétries et invariances des causes (ici $i(t)$) doivent se retrouver dans les effets (ici courants induits) donc tout plan contenant Oz est un plan d'antisymétrie, donc $\overrightarrow{E}_i$ est normale à ce plan et alors il est orthoradiale : $\overrightarrow{E}_i=E_i\overrightarrow{u}_\theta$ en coordonnées cylindriques.
Toute rotation et translation le long de l'axe Oz laissent les courants induits invariants, donc E_i ne dépend que de r en ces coordonnées : $\overrightarrow{E}_i=\overrightarrow{E}_i(r)$.

20.

La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday s'obtient pour un circuit $\mathscr{C}$, sous forme d'un cercle de rayon r, par :
$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}_i=-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$
$\Rightarrow\oint_{\mathscr{C}}\overrightarrow{E}_i(r).\overrightarrow{d\ell}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_\Sigma\overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS}$
où Σ est toute surface ouverte s'appuyant sur le contour $\mathscr{C}$, on choisit la surface de section droite du cercle de rayon r donc :
$2\pi rE_i(r,t)=-\frac{\partial B_a(t)}{\partial t}\times\pi r^2$ donc :

$$\boxed{\vec{E}_i(r,t) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_a(t)}{\partial t}\vec{u}_\theta}$$

V. Application : four à induction

21.

L'équation de $Maxwell - Ampere$ s'écrit :

$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_o(\vec{j} + \vec{j}_D)$ où $\vec{j}_D = \varepsilon_o \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, à la fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 1\ kHz$ on peut néliger j_D devant j en effet :

j_D est négligeable devant j si :

$\dfrac{j_D}{j} \ll 1$ c-à-d $\dfrac{\|\varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\gamma \vec{E}\|} \ll 1$

Grâce au théorème de $Fourier$ et à la linéarité des équation de $Maxwell$ réigissant le champ E, prenons $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_o e^{i\omega t}$ donc la condition $\dfrac{j_D}{j} \ll 1$ devient :

$\dfrac{\varepsilon_o \omega}{\gamma} \ll 1$ soit $f \ll \dfrac{\gamma}{2\pi\varepsilon_o}$

et sachant que $\mu_o \varepsilon_o c^2 = 1$ alors : $f \ll \dfrac{\mu_o \gamma c^2}{2\pi}$ dans notre cas on a :

$\dfrac{\mu_o \gamma c^2}{2\pi} = \dfrac{4\pi 10^{-7} \times 6.10^7 \times (3.10^8)^2}{2\pi} \simeq 10^{18}$

Donc $f = 1\ kHz$ est largement inférieure à cette valeur, et donc $j_D \ll j$ et par conséquent l'équation de $Maxwell - Ampere$ se simplifie en :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_o \vec{j}}$$

Cette approximation est appelée : approximation des régimes quasi-statique (ou quasi-permanent).

22.1.

La bobine est supposée infinie donc le champ magnétique, en ARQS, à l'intérieur de celle-ci s'écrit :

$\vec{B}_a(t) = \mu_o \dfrac{N}{H} i(t) \vec{u}_z$

soit $\vec{B}_a(t) = \mu_o \dfrac{N}{H} I_o \cos\omega t\, \vec{u}_z$ c-à-d :

$$\boxed{\vec{B}_a(t) = B_o \cos\omega t\, \vec{u}_z \text{ où } B_o = \mu_o \frac{N}{H} I_o}$$

22.2.

D'après la question 20. on a :

$\vec{E}_i(r,t) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{\partial B_a(t)}{\partial t}\vec{u}_\theta$ donc :

$\vec{E}_i(r,t) = -\dfrac{r}{2} \times (-\omega B_o \sin\omega t)\vec{u}_\theta$ soit :

$$\boxed{\vec{E}_i(r,t) = \frac{1}{2} r\omega B_o \sin\omega t\, \vec{u}_\theta}$$

22.3.

Le champ électrique induit E_i agit sur les porteurs de charge du barreau conducteur et donc ceux-ci subissent la force $\vec{f} = q\vec{E}_i$ et donc une vitesse de dérive prend naissance suivant la même direction que $\vec{E}_i$, c-à-d $\vec{u}_\theta$ et par voie de conséquence une densité volumique de courant apparaît au sein du conducteur.

Cette densité de courant donne naissance par effet $Joule$ à un échauffement du barreau.

22.4.

Le conducteur est Ohmique donc d'après la loi d'Ohm on a :

$\vec{j} = \gamma \vec{E}_i$ soit :

$$\boxed{\vec{j} = \frac{1}{2}\gamma r\omega B_o \sin\omega t\, \vec{u}_\theta}$$

22.5.

La puissance volumique dissipée par effet Joule est donnée par définition par :

$p_J = \vec{j}.\vec{E}_i$ et puisque $\vec{j} = \gamma \vec{E}_i$ alors celle-ci devient : $p_J = \gamma E_i^2$ soit pour tout $r \le a$ on a :

$$\boxed{p_J = \frac{1}{4}\gamma\omega^2 B_o^2 r^2 \sin^2\omega t}$$

Sa valeur moyenne sur une période est :

$< p_J > = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p_J\, dt$ soit

$< p_J > = \dfrac{1}{4}\gamma\omega^2 B_o^2 r^2 \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \sin^2\omega t\, dt$

et sachant que $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \sin^2\omega t\, dt = \dfrac{1}{2}$ alors :

$$\boxed{< p_J > = \frac{1}{8}\gamma\omega^2 B_o^2 r^2}$$

On remarque bien que cette puissance volumique moyenne est non homogène dans le conducteur puisque elle dépend de r

22.6.

La puissnace moyenne disssipée par effet Joule s'écrit alors par :

$< P_J > = \displaystyle\iiint_V < p_J > d\tau$

où V est le volume totale du conduc-

teur et $d\tau = rdrd\theta dz$, soit en coordonnées cylindriques :
$< P_J > = \frac{1}{8}\gamma\omega^2 B_o^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \int_0^a r^2 rdr$
c-à-d :
$< P_J > = \frac{1}{8}\gamma\omega^2 B_o^2 \times 2\pi \times H \times \frac{a^4}{4}$
finalement :

$$\boxed{< P_J > = \frac{1}{16}\gamma\omega^2 B_o^2 \pi H a^4}$$

Cette puissance est proportionnelle à la conductivité du matériau utilisé et au volume de celui-ci ($\pi a^2 \times H$) ainsi qu'au carré de la fréquence du champ magnétique appliqué.
Ce qui explique le choix de $f = 1\ kHz$ au lieu de la fréquence de secteur $50\ Hz$ (disponible sans faire appel à un oscillateur annexe)
en effet :

$$\frac{< P_J(1kHz) >}{< P_J(50Hz) >} = \frac{(10^3)^2}{(50)^2} = 400$$

2.2.7.

L'intérêt pratique du dispositif est de chauffer le barreau conducteur utilisé voire le faire fondre.

Cette technique est utilisée pour homogénéiser, par chauffage, les impuretés dans certains matériaux ou alléages (recherche fondamentale entre autre).

2.2.8.

La puissance est proportionnelle à a^4 donc si on fait diminuer a, la puissance diminuera d'une façon notable.
On a montré que $< p_J >$ est proportionnelle à r^2 donc pour $r = a = \frac{b}{n}$ elle sera proportionnelle à $\frac{1}{n^2}$

2.3.1.

D'après le principe de $Curie$, la symétrie et invariances des causes, ici les courants induits, doivent se retrouver dans les effets, ici : $B_i(M)$, donc puisque tout plan normale à l'axe Oz et passant par M est un plan de symétrie de la distribution de courants induits, alors $\overrightarrow{B}_i(M)$ est normale à ce plan donc : $\overrightarrow{B}_i = B_i(M)\overrightarrow{u}_z$
et puisque la distribution de courant est inavariante par rotation et translation le long de l'axe Oz alors $B_i(M)$ ne dépend que de r en coordonnées cylindriques, finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{B}_i = B(r,t)\overrightarrow{u}_z}$$

(la dépendance du temps découle du principe de $Curie$)

2.3.2.

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B}_i = \mu_o \overrightarrow{j}$$

l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques n'a pas été donnée (exprès pour départager les élèves) Puisque $B = B(r)\overrightarrow{u}_z$ alors :
$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B} = (-\frac{\partial B}{\partial r})\overrightarrow{u}_\theta$
soit :
$B_i(r,t) = -\frac{1}{4}\mu_o\gamma r^2\omega B_o \sin\omega t + cte$
et puisque $B_i(r = a^+) = B_i(r = a^-)$ alors $B_i(r = a) = 0$ (on a continuité de B car la distribution est volumique).
donc :

$$\boxed{\overrightarrow{B}_i(r,t) = \frac{1}{4}\mu_o\gamma(a^2 - r^2)\omega B_o \sin\omega t\, \overrightarrow{u}_z}$$

$|\overrightarrow{B}_i| \ll |\overrightarrow{B}_a|$
si $\frac{1}{4}\mu_o\gamma(a^2 - r^2)\omega B_o \sin\omega t \ll B_o \cos\omega t$
donc si :
La valeur maximale de B_i correspond à $r = 0$ (sur l'axe), et puisque $\sin\omega t < 1$ et $\cos\omega t < 1$ alors :
Il faut que : $\frac{1}{4}\mu_o\gamma a^2\omega \ll 1$
c-à-d :
$a^2 \ll \frac{4}{\mu_o\gamma\omega} = a_\ell^2$ donc si $r \ll a_\ell$ où $\boxed{a_\ell = \frac{2}{\sqrt{\mu_o\gamma\omega}}}$ avec les valeurs numériques du texte on a : $\boxed{a_\ell = 4\ \mu m}$

2.3.3.

Puisque $a = 10\ cm >> a_\ell$ on ne doit pas négliger B_i devant B_a et par conséquent l'hypothèse n'est pas vérifiée

2.3.4.

On a $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B} = \mu_o \overrightarrow{j}$ (puisqu'on est toujours dans l'ARQS) et $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$ et sachant que :
$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B} = \overrightarrow{gard}\ div\ \overrightarrow{B} - \Delta\overrightarrow{B}$
et $div\ \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ alors :
$-\Delta\overrightarrow{B} = \mu_o\gamma\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{E}$ et puisque
$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$ alors $\Delta\overrightarrow{B} = \mu_o\gamma\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$ et par identification avec le laplacien proposé par le texte (puisque son expression n'a pas été explicitement donné) on a :

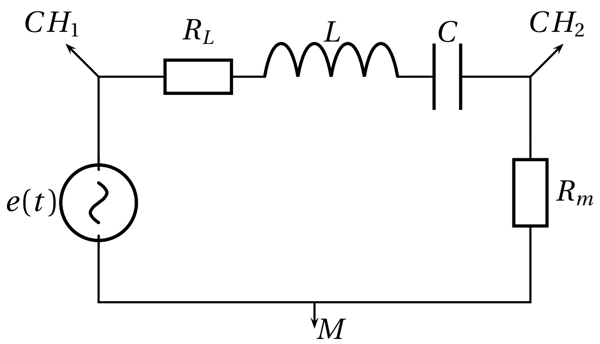
$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r}+\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}=\mu_o\gamma\frac{\partial B}{\partial t}}$$

On s'attendra à une solution de type effet de peau (décroissance exponnentielle par rapport à r)

VI. Détermination expérimentale...

24.

Les branchement de l'oscilloscope sont indiques par CH_1 et CH_2 et la masse commune par M.



25.

Le mode AC ici est préférable (si le signal est de valeur moyenne non nulle), car on a besoin de mesurer la valeur maximale de la tension ($V_{eff}=\frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$ pour le signal sinusoïdale) et la mesure de la valeur maximale est encore précise si on la mesure de crête à crête et la diviser en suite en deux.

26.

Pour mesurer la fréquence de résonnance rapidement et d'une façon préicise on règle l'oscilloscope en mode $X-Y$, puis on fait varier la fréquence du GBF et lorsque l'ellipse devient droite à ce moment la fréquence est celle de résonnance.

27.

En notation complexe on a : $\underline{u}=\underline{Z}\underline{i}$ donc $\underline{u}=(R_L+R_m)+j(L\omega-\frac{1}{C\omega})\underline{i}$

$$\Rightarrow I=\frac{U}{\sqrt{(R_L+R_m)^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$I=\frac{U}{\sqrt{(R_L+R_m)^2+(2\pi fL-\frac{1}{2\pi fC})^2}}$$

La fréquence de résonnance est donc :

$$\boxed{f_o=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$ (celle de RLC)

à la résonnance on a : $L\omega_o=\frac{1}{C\omega_o}$ donc :

$$\boxed{I_o=\frac{U}{R_L+R_m}}$$

28.

À la résonnance on $LC(2\pi f_o)^2=1$ donc :

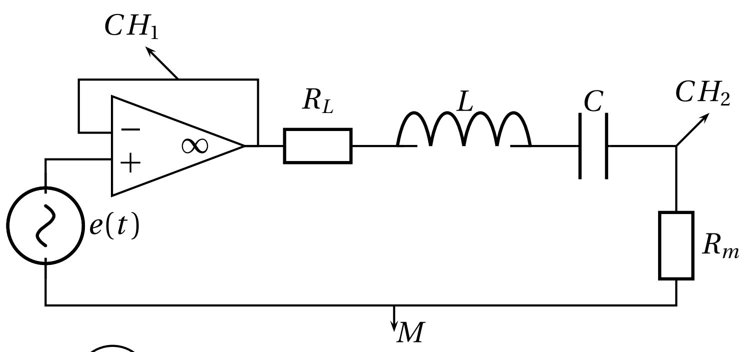
$$\boxed{L=\frac{1}{4\pi^2 f_o^2}}$$

Et on a aussi à cette fréquence $U=(R_L+R_m)I$ et $U'=R_m I$ donc :

$$\boxed{R_L=R_m(\frac{U}{U'}-1)}$$

29.

Dans ce cas la tension aux bornes du GBF est : $u_g(t)=u(t)-R_g i(t)$ et donc elle varie en fonction de f.
Pour remédier à ce défaut on utilise un amplificateur opérationnel monté en suiveur (si la tension d'entrée est faible) ou un transformateur d'isolement : (nombre de spire du primaire et du secondaire sont identique) si les courants sont forts.



VII. Étude de l'alimentation du four

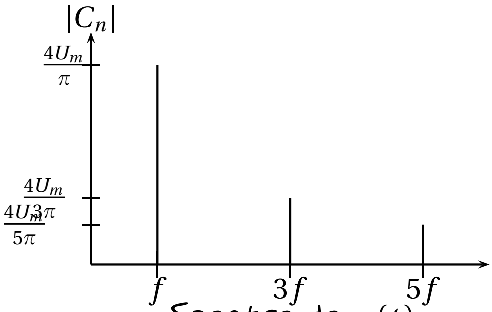
30.

Le rôle du condensateur dans ce cas est de pouvoir réaliser le phénomène de résonnance pour le transfert de puissnace soit maximale, ce qui n'est pas le cas dans son absence.

31.

Le signal est periodique donc décomposable en série de Fourier il est en plus impaire et de valeur moyenne nulle c'est pourquoi les termes en cosinus sont nuls.

Le spectre du signal est donc :



Spectre de $u(t)$

32.

$U_1 = \frac{4U_m}{\pi\sqrt{2}}$ soit $\boxed{U_1 = 180\ V}$

$U_3 = \frac{4U_m}{3\pi\sqrt{2}}$ soit $\boxed{U_1 = 60\ V}$

33.

L'impédance complexe de la charge totale est :

$\underline{Z} = R_L + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$ et son module est :

$Z = \sqrt{R_L^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ donc :

$Z_1 = \sqrt{R_L^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

et

$Z_3 = \sqrt{R_L^2 + (3L\omega - \frac{1}{3C\omega})^2}$

$Z_1 = \sqrt{(20.10^{-3})^2 + (2\pi.10^3 \times 70.10^{-6} - \frac{1}{2\pi 10^3 \times 0,5.10^{-3}})^2}$

$Z_3 = \sqrt{(20.10^{-3})^2 + (6\pi.10^3 \times 70.10^{-6} - \frac{1}{6\pi 10^3 \times 0,5.10^{-3}})^2}$

$\boxed{Z_1 = 0,123\ \Omega}$ et $\boxed{Z_3 = 1,21\ \Omega}$

34.

$U_1 = Z_1 I_1$ et $U_3 = Z_3 I_3$ donc :

$I_{1/3} = \frac{Z_3 U_1}{Z_1 U_3}$ ce qui donne avec les valeures calculées auparavant :

$I_{1/3} = \frac{1,21 \times 180}{0,123 \times 60}$

$\boxed{I_{1/3} = 29,5}$

Conclusion :

Puisque les harmoniques décroissent en $\frac{1}{2n+1}$ et $I_3 \ll I_1$ on peut dire que seul le fondamental est à tenir en compte, dans ce cas $u(t) \simeq \frac{4U_m}{\pi}\sin(2\pi f t)$

donc $\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z}_1}$ avec $\mathscr{I}m\left(\underline{u}(t)\right) = u(t)$,

soit :

$\underline{i}(t) = \frac{4U_m}{\pi(R_L + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}))} e^{j(2\pi f t)}$

$i(t) = \frac{4U_m}{\pi\sqrt{R_L^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} e^{j(2\pi f t + \varphi)}$

où $\varphi = -arct(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_L})$

$i(t) = \frac{4U_m}{\pi\sqrt{R_L^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \sin(2\pi f t + \varphi)$

Donc :

$$\boxed{I_o = \frac{4U_m}{\pi\sqrt{R_L^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}}$$

et

$$\boxed{\varphi = arct(\frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R_L})}$$

35.

La puissnace active est donc :

$P = UI\cos\varphi$ donc $P = U_1 I_1 \cos\varphi = U_1 \frac{I_o}{\sqrt{2}} \cos\varphi$.

ce qui donne :

d'après l'expression de $\underline{Z}$ on a :

$\cos\varphi = \frac{R_L}{\sqrt{R_L^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2}}$ donc :

$P = \frac{4U_m}{\pi\sqrt{2}} \times \frac{4U_m}{\sqrt{2}\pi\sqrt{R_L^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \times \frac{R_L}{\sqrt{R_L^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2}}$

Donc :

$P = \frac{8U_m^2 R_L}{\pi^2(R_L^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2)}$

A.N :

$\boxed{P = 43\ W}$